Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 1 *Να μελετηθεί το επίπεδο φάσης για τα συστήματα* $\vec{y}' = Ay$, *όπου*

$$\text{(i)}\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(ii)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(iii)}\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2 *Έστω το σύστημα* $\vec{y}' = Ay$, *όπου*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρείτε την ευσταθή πολλαπλότητα, δηλ. τα σημεία $\vec{y}(0)$ *για τα οποία οι αντίστοιχες τροχιές τείνουν στο 0, καθώς το* $t \to +\infty$.

Άσκηση 3 *Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα:*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - y_1(1 - y_1^2 - y_2^2) \\ y_2' = -y_1 - y_2(1 - y_1^2 - y_2^2) \end{cases}$$

(i) *Να δειχθεί ότι το 0 είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας και να βρεθεί ο τύπος του.*

(ii) *Να δειχθεί ότι ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος* $D = \{y_1^2 + y_2^2 < 1\}$ *είναι αναλλοίωτος από το σύστημα, δηλ. για* $(y_1(0), y_2(0)) \in D$ *έπεται* $(y_1(t), y_2(t)) \in D$ *για κάθε* $t > 0$.

(iii) *Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις με αρχικές συνθήκες στο* D *συγκλίνουν εκθετικά στο 0, καθώς το* $t \to +\infty$.

Άσκηση 4 *Έστω το σύστημα:*

$$\begin{cases} y_1' = y_1^3 - y_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} y_2^2 \\ y_2' = y_2(y_1^2 - \frac{1}{\sqrt{n}} y_1) \end{cases}$$

όπου $n \geq 2$.

(i) *Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να μελετηθεί ο τύπος τους μέσω της γραμμικοποίησης.*

(ii) *Να δειχθεί ότι το 0 είναι Lyapunov ευσταθές.*

Άσκηση 5 *Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης*

$$y'' + (y')^5 + y + y^3 = 0$$

τείνουν στο 0, καθώς το $t \to +\infty$.

Άσκηση 6 *Να μετατραπεί η εξίσωση*

$$y'' + (1 - e^{-y^2})y = 0$$

σε σύστημα πρώτης τάξης και να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης.

Άσκηση 7 *Θεωρούμε το σύστημα*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

όπου f_1, f_2 *συνεχείς στο* $\mathbb{R}^2$. *Έστω ότι υπάρχει* $k > 0$ *τέτοιο ώστε* $y_1 f_1(y_1, y_2) + y_2 f_2(y_1, y_2) < 0$, *για κάθε* $y_1^2 + y_2^2 > k$. *Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις του συστήματος είναι φραγμένες για* $t \geq 0$.

Υποδείξεις

1 (i) Ο πίνακας έχει διπλή ιδιοτιμή $\lambda = -1$ και είναι μη απλής δομής. Άρα η γενική λύση είναι της μορφής $\vec{y} = c_1 e^{-t}\vec{u} + c_2 e^{-t}(\vec{v} + t\vec{u})$, όπου $\vec{v}$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης 2 και $\vec{u}$ κανονικό ιδιοδιάνυσμα. Άρα για $c_2 = 0$ οι τροχιές είναι πάνω στην ευθεία με κατεύθυνση $\vec{u}$ και για $c_2 \neq 0$ οι τροχιές είναι καμπύλες που καθώς το $t \to +\infty$ συγκλίνουν στο 0 και εφάπτονται ασυμπτωτικά στην ευθεία με κατεύθυνση $\vec{u}$.

(ii) Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(3 + \lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

Εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχει μόνο ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα, οπότε έχουμε πίνακα μη απλής δομής και είμαστε ακριβώς στην προηγούμενη περίπτωση (i).

(iii) Η γενική λύση υπολογίζεται κατευθείαν:

$$\begin{aligned} y_2' &= 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_2(0) \\ y_1' &= y_2 = y_2(0) \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_1(0) + y_2(0)t \end{aligned}$$

Άρα οι τροχιές είναι οριζόντιες ευθείες που διέρχονται από το σημείο $(y_1(0), y_2(0))$, εκτός από την περίπτωση $y_2(0) = 0$, δηλ. τον άξονα y_1, όπου όλα τα σημεία είναι σημεία ισορροπίας και οι τροχιές σταθερές.

2 Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = -3, \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm i.$$

Άρα η γενική λύση είναι της μορφής $\vec{y} = c_1 e^{-3t}\vec{u} + c_2 e^{2t}\mathrm{Re}(e^{it}\vec{v}) + c_3 e^{2t}\mathrm{Im}(e^{it}\vec{v})$, όπου $\vec{v}$ είναι μιγαδικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $2 + i$. Μια τροχιά είναι στην ευσταθή πολλαπλότητα, αν συγκλίνει στο 0, καθώς το $t \to +\infty$. Επομένως μόνο αρχικές συνθήκες με $c_2 = c_3 = 0$ έχουν αυτή την ιδιότητα. Πρέπει δηλαδή το $\vec{y}(0)$ να είναι πάνω στην ευθεία του $\vec{u}$. Άρα η ευθεία στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ είναι η ευσταθής πολλαπλότητα.

3 (i) Για $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ σημείο ισορροπίας έχουμε:

$$\begin{cases} \overline{y}_2 - \overline{y}_1(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2) = 0 \\ -\overline{y}_1 - \overline{y}_2(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{y}_2\overline{y}_1 - \overline{y}_1^2(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2) = 0 \\ -\overline{y}_1\overline{y}_2 - \overline{y}_2^2(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2) = 0 \end{cases}$$

Αθροίζοντας τις δύο ταυτότητες παίρνουμε $(\overline{y}_1^2 + \overline{y}_2^2)(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2) = 0$. Άρα είτε $\overline{y}_1 = \overline{y}_2 = 0$ ή $\overline{y}_1^2 + \overline{y}_2^2 = 1$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται διότι το αρχικό σύστημα τότε δίνει $\overline{y}_2 = 0$, $-\overline{y}_1 = 0$. Άρα $\overline{y} = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Έπειτα υπολογίζουμε τη γραμμικοποίηση στο 0:

$$\vec{y}' = Df(0)\vec{y}, \qquad Df(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

όπου $f(y_1, y_2) = (y_2 - y_1(1 - y_1^2 - y_2^2), -y_1 - y_2(1 - y_1^2 - y_2^2))$. Ο πίνακας $Df(0)$ έχει μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Εφόσον $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος.

(ii) Έστω $V = y_1^2 + y_2^2$. Υπολογίζουμε

$$V' = -2(y_1^2 + y_2^2)(1 - y_1^2 - y_2^2).$$

Για $V(0) = y_1^2(0) + y_2^2(0) < 1$, έχουμε αρχικά ότι $V'(0) < 0$. Από συνέχεια της V' στο 0, έχουμε ότι $V'(t) < 0$ για $t \in [0, \delta)$, για κάποιο $\delta > 0$. Άρα στο $[0, \delta)$ η V είναι γνησίως φθίνουσα και $V(t) < V(0)$ για κάθε $t \in (0, \delta)$. Ισχυριζόμαστε πως $V(t) < V(0)$ για κάθε $t > 0$. Έστω ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός μας. Τότε θα πρέπει να υπάρχει ένα $T > 0$ ώστε για πρώτη φορά $V(T) = V(0)$ και $V(t) < V(0)$ για κάθε $t \in (0, T)$. Από συνέχεια της V' στο T και το γεγονός ότι $V'(T) = -2V(0)(1-V(0)) < 0$, έπεται ότι $V' < 0$ για κάθε $t \in (T-\varepsilon, T+\varepsilon)$, για κάποιο $\varepsilon > 0$. Άρα η V είναι γνησίως φθίνουσα στο $(T-\varepsilon, T+\varepsilon)$ και $V(T) < V(T-\varepsilon) < V(0)$, άτοπο. Άρα ο ισχυρισμός μας ισχύει και $V(t) < V(0)$ για κάθε $t > 0$. Ειδικότερα $y_1^2 + y_2^2 < y_1^2(0) + y_2^2(0) < 1$ για κάθε $t > 0$ και άρα η τροχιά της λύσης $\vec{y}$ παραμένει για όλους τους θετικούς χρόνους στο δίσκο D.

(iii) Θέτουμε $\alpha = 1 - V(0) > 0$. Από το (ii) έχουμε ότι $-(1-V(t)) = V(t) - 1 < V(0) - 1 = -\alpha$. Άρα $V' < -2\alpha V$, για κάθε $t > 0$. Οπότε έχουμε $(Ve^{2\alpha t})' < 0$ και επομένως $V \leq V(0)e^{-2\alpha t}$. Άρα η λύση συγκλίνει εκθετικά στο 0, εφόσον η απόστασή της από το 0, $V(t) = y_1^2 + y_2^2$, συγκλίνει εκθετικά στο 0.

4 (i) Τα σημεία ισορροπίας $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ ικανοποιούν:

$$\begin{cases} \overline{y}_1^3 - \overline{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{y}_2^2 = 0 \\ \overline{y}_2(\overline{y}_1^2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{y}_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{y}_1^3 - \overline{y}_1 = 0 \\ \overline{y}_2 = 0 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} \overline{y}_1^3 - \overline{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{y}_2^2 = 0 \\ \overline{y}_1^2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{y}_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα έχουμε $\overline{y} = (0,0), (1,0), (-1,0), (\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{1-\frac{1}{n}}), (\frac{1}{\sqrt{n}}, -\sqrt{1-\frac{1}{n}})$. Η γραμμικοποίηση του αρχικού συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας είναι το σύστημα

$$\vec{y}' = Df(\overline{y})\vec{y}, \text{ όπου } f(y_1, y_2) = (y_1^3 - y_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}y_2^2, y_2(y_1^2 - \frac{1}{\sqrt{n}}y_1))$$

Υπολογίζουμε

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}, \qquad Df(-1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix},$$

$$Df(\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{1 - \frac{1}{n}}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{n} - 1 & \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$Df(\frac{1}{\sqrt{n}}, -\sqrt{1 - \frac{1}{n}}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{n} - 1 & -\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι τα σ.ι. $(1,0), (-1,0)$ είναι ασταθή λόγω θετικών ιδιοτιμών των αντίστοιχων πινάκων. Τα σ.ι. $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{1-\frac{1}{n}}), (\frac{1}{\sqrt{n}}, -\sqrt{1-\frac{1}{n}})$ είναι ασταθή, διότι οι ορίζουσες των αντίστοιχων πινάκων είναι αρνητικές, που σημαίνει ότι ο κάθε πίνακας έχει μία αρνητική και μία θετική ιδιοτιμή (λόγος αστάθειας). Για τον τύπο του $(0,0)$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε μέσω της γραμμικοποίησης διότι η μία ιδιοτιμή είναι αρνητική (υπέρ της ευστάθειας), αλλά η άλλη μηδενική.

(ii) Θεωρούμε τη θετικά ορισμένη συνάρτηση $V = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ κοντά στο 0. Η παράγωγός της V ως προς το χρόνο ισούται:

$$V' = y_1^4 - y_1^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}y_1y_2^2 + y_2^2y_1^2 - \frac{1}{\sqrt{n}}y_1y_2^2 = y_1^2(y_1^2 + y_2^2 - 1) \leq 0$$

για (y_1, y_2) κοντά στο 0. Άρα το $(0,0)$ είναι Lyapunov ευσταθές.

5 Πρώτα μετατρέπουμε την εξίσωση σε σύστημα θέτοντας $y_1 = y, y_2 = y'$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_2^5 - y_1 - y_1^3 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το 0. Έπειτα θεωρούμε τη συνάρτηση $V = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{4}y_1^4 \geq 0$ και υπολογίζουμε την παράγωγο της ως προς το χρόνο:

$$V' = -y_2^6 \leq 0$$

Άρα η V είναι φθίνουσα, η τροχιά $y(t)$ υπάρχει για κάθε $t \geq 0$ και η V έχει όριο καθώς το $t \to +\infty$, $V(t) \to \ell \geq 0$. Αν $\ell = 0$, τελειώσαμε. Αν $\ell > 0$, τότε ξέρουμε ότι τελικά η τροχιά $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ θα βρίσκεται σε ένα φραγμένο χωρίο της μορφής $\Omega = \{0 < c \leq \|y\|_2 \leq C\}$, για κάθε $t \geq T$, για κάποιο $T > 0$. Επομένως υπάρχει ακολουθία $\vec{y}(t_n)$ που συγκλίνει σε κάποιο $\vec{\xi} \in \Omega$, καθώς το $t_n \to +\infty$, λόγω συμπάγειας του Ω και συνέχειας της $\vec{y}$. Άρα υπάρχει ακολουθία $\tau_n \to +\infty$ τέτοια ώστε $\vec{y}'(\tau_n) = [\vec{y}(t_k) - \vec{y}(t_m)]/(t_k - t_m) \to 0$, από Θ.Μ.Τ. για προσεκτικά διαλεγμένα $t_k - t_m > 1$. Παίρνοντας υπακολουθία τ_{k_n} (λόγω συμπάγειας του Ω) ώστε $\vec{y}(\tau_{k_n})$ επίσης να συγκλίνει σε κάποιο $\vec{\zeta} \in \Omega$, περνόντας στο όριο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το ζ πρέπει να είναι σημείο ισορροπίας, άτοπο εφόσον $\|\vec{\zeta}\|_2 \geq c > 0$ και το μοναδικό σ.ι. είναι το 0. Άρα $\ell = 0$ και καταλήξαμε στο επιθυμητό συμπέρασμα.

6 Το επαγόμενο σύστημα για $y_1 = y, y_2 = y'$ είναι

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -(1 - e^{-y_1^2})y_1 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση με y_2 και χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση καταλήγουμε στη σχέση:

$$(y_2^2 + y_1^2 + e^{-y_1^2})' = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2^2 + y_1^2 + e^{-y_1^2} = C > 0$$

Άρα οι τροχιές $\vec{y}$ στο επίπεδο y_1y_2 είναι κλειστές καμπύλες γύρω από το μοναδικό σ.ι. 0, για μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

7 Έστω $V = y_1^2 + y_2^2$. Θα δείξουμε ότι $V(t) \leq \max\{V(0), k+1\}$ για κάθε $t \geq 0$ και άρα η τροχιά $\vec{y} = (y_1, y_2)$ είναι φραγμένη. Πρώτα παρατηρούμε ότι υπάρχει $T > 0$, τέτοιο ώστε $V(t) \leq \max\{V(0), k+1\}$ για κάθε $t \in [0, T)$. Πράγματι, αν $V(0) < k+1$, τότε η παρατήρηση ισχύει λόγω συνέχειας. Αν $V(0) \geq k+1 > k$, έχουμε ότι $V'(0) = y_1 f_1(y_1, y_2) + y_2 f_2(y_1, y_2) < 0$ και άρα από τη συνέχεια της V', υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε $V'(t) < 0$ για κάθε $t \in [0, T)$. Επομένως η V είναι φθίνουσα στο $[0, T)$ και $V(t) \leq V(0)$ για κάθε $t \in [0, T)$. Υποθέτουμε τώρα ότι $T > 0$ είναι ο μέγιστος χρόνος τέτοιος ώστε να ισχύει $V(t) \leq \max\{V(0), k+1\}$ για κάθε $t \in [0, T)$. Αν $T < +\infty$, τότε $V(T) = \max\{V(0), k+1\} > k$. Άρα για τον ίδιο λόγο όπως πριν $V'(T) < 0$ και από τη συνέχεια της V', έχουμε ότι $V'(t) < 0$ για κάθε $t \in [T, T+\delta]$, για κάποιο $\delta > 0$. Άρα $V(t) \leq V(T) = \max\{V(0), k+1\}$ για κάθε $t \in [T, T+\delta]$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το T είναι ο μέγιστος χρόνος με αυτή την ιδιότητα. Επομένως $T = +\infty$ και έχουμε το συμπέρασμα.